(1998)

opg. I

1.A. (zie boek) $\begin{cases} U_x - V_x = 0 \\ U_y + V_y = 0 \end{cases}$ (*)

B (boek)

D. gebruik de Cauchy-Riemann vergelijking om te kijken of U, V voldoen aan (*)

---

opg(II)

I.2. hint: $|f(z)| \le M(1+|z|)^N$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(1+|z|)^N} \le M$$

d.w.z, $f(z)$ beperkte orde heeft, dus een polynoom.

I.3.

(Voor som I v. opg. II zie volgende blad)

VU II

1. gegeven is dat $f(z)$ een holomorfe functie op $\mathbb{C}$. uit de Residustelling volgt,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = Res(z; f(\zeta)) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{--- (1a)}$$

~~$(z \in C(0,R))$ maar~~ ( $z$ een punt binnen de cirkel $C(0,R)$ )

merk op dat,

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{(1-\frac{z}{\zeta})}\, d\zeta \quad \text{--- (1b)}$$

aangezien dat $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$. (omdat $z$ een punt binnen de cirkel, terwijl $\zeta$ een punt op de cirkel, de afstand van $z$ tot de oorsprong is daarom kleiner dan die van $\zeta$ tot de oorsprong. m.a.w, $|z| < |\zeta|$), kunnen wij de Taylorreeks toepassen op de term $\frac{1}{(1-\frac{z}{\zeta})}$ in (1b). er geldt,

$$\frac{1}{1-(\frac{z}{\zeta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \quad \text{--- (1c)}$$

Vul (1c) in (1b), ontstaat,

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^n} \cancel{\sum_{n=0} \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n}$$

$$= \cancel{\int} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\right) z^n \quad \text{--- (1d)}$$

Combineer (1d) met (1a), levert,

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta} \quad \text{--- (1e)}$$

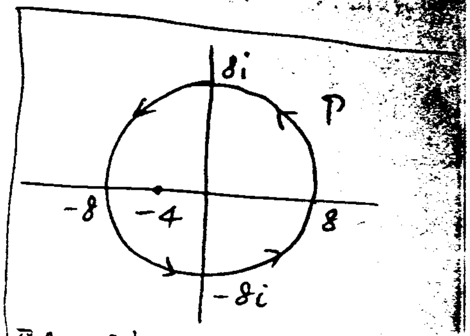
* opm. de uitd.-(1e) geldt niet alleen voor $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, maar ook voor alle negatieve $n \in \mathbb{Z}$. $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ zijn daarom juist de coëfficienten die in een Laurentreeks voorkomen. in het bijzonder,

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} f(\zeta)\, d\zeta} \quad \text{--- (1f)}$$

opg. III

2.(i) $$\int_P \frac{dz}{z+4} = 2\pi i \,\mathrm{Res}(-4) = 2\pi i * 1 = 2\pi i$$

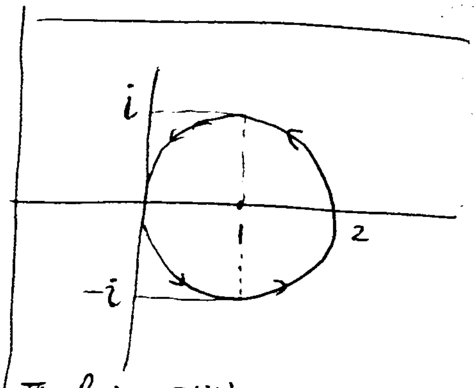
(merk op dat $z=-4$ de enige pool is binnen $P$)




II fig. 2(i)

(ii) $$\int_P \frac{\arctan(z)}{z-1}\, dz$$

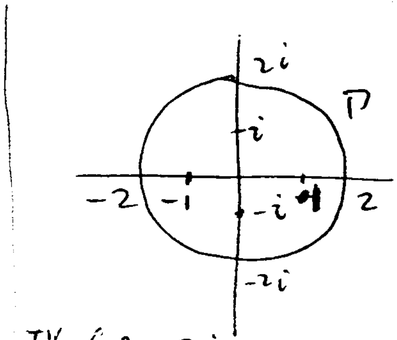
$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}(1) = 2\pi i \cdot \arctan(1) \left(= 2\pi i * \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right)$$




III fig. 2(ii)

opg IV.

2. (i) laat $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$, dan heeft die twee polen binnen $P$. (zie fig), er geldt:




IV fig. 2(i)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_P f(z)\, dz = \mathrm{Res}(1) + \mathrm{Res}(-1)$$

$$= \left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=1} + \left.\frac{e^z}{z-1}\right|_{z=-1}$$

$$= \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{-2} = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) = \sinh(1)$$

$$\Rightarrow \int_P f(z)\, dz = 2\pi i \sinh(1).$$

(ii) laat $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2-2z+1)} = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$, dan

$$\int_P f(z) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(1)\right)$$

$$= 2\pi i \left( \left.\frac{e^z}{(z-1)^2}\right|_{z=0} + \left.\left(\frac{e^z}{z}\right)'\right|_{z=1} \right)$$

$$= 2\pi i (1 + 0) = 2\pi i$$

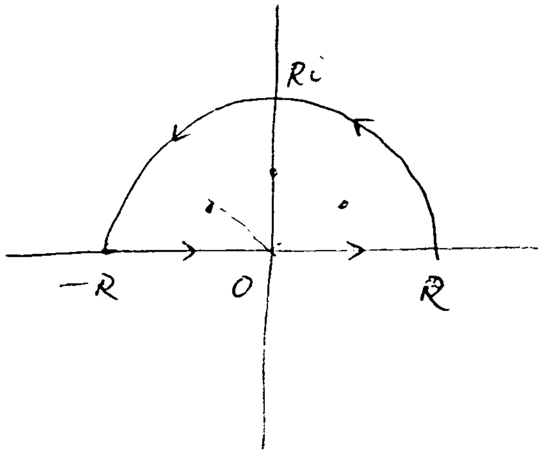
* opmerking: er bestaan simpele methodes om de residus te bepalen. Stel dat $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, waarin $g(z)$ analytisch en ~~h(z)~~ ~~heeft~~ $z_0$ een nulpunt is van $h(z)$ met een orde $m$, d.w.z. $h(z) = (z-z_0)^m p(z)$, ~~...~~ dan ...

d.m.v. de volgende formule berekend worden:

$$\boxed{\begin{aligned} Res(z_0) &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m \frac{g(z)}{h(z)} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{g(z)}{p(z)} \end{aligned}} \quad (2A)$$

(in het bijzonder als $m=1$)

3.




Laat $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$. Wij proberen nu de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$ te bereken m.b.v. de integraal van $f(z)$ over de curve $C_R$ (zie fig) er geldt immers.

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{boog} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1} dx$$

Het is duidelijk dat $\int_{boog} f(z)\,dz \Big|_{R\to\infty} = 0$, er geldt dus, $R\to\infty$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^6+1} = \int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} \frac{dz}{z^6+1}$$

Om de laatste integraal te bepalen, moeten wij de polen van $f(z)$ ~~bij~~ vinden binnen $C_R$. Laat $z^6+1=0 \Rightarrow z^6 = -1 = e^{i\pi}$

Hiermee vinden wij de polen $\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{3}{6}\pi}, e^{i\frac{5}{6}\pi}, e^{i\frac{7}{6}\pi}, e^{i\frac{9}{6}\pi}, e^{i\frac{11}{6}\pi}\}$

merk op alleen de eerste drie polen binnen ~~het~~ $C_R$ liggen. dus,

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left( Res(e^{i\frac{\pi}{6}}) + Res(e^{i\frac{3}{6}\pi}) + Res(e^{i\frac{5}{6}\pi}) \right)$$

gebruikmakend van de formule (2A) hierboven, kunnen wij deze residi uitrekenen. Hiermee kunnen wij $\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^6+1}$ bepalen.

Het blijkt: $\int^{R} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi$.